Testes de hipóteses

Introdução

- ***Teste de hipóteses*** **(T.H.)** paramétrico:
  - ***Resumo***: Formulam-se ***duas hipóteses*** contraditórias ($\boldsymbol{H_0}$ e $\boldsymbol{H_1}$) sobre o valor de um ***parâmetro*** de uma população. Por exemplo:

$$H_0 : \mu = 2000$$
$$H_1 : \mu \neq 2000$$

    Depois, ***rejeita-se a hipótese menos provável*** segundo os dados de uma ***amostra*** dessa população.

  - ***Passos fundamentais do <u>método da região crítica</u>***:

    1. Formulação das ***hipóteses*** H_0 e H_1.
    2. Escolha da ***estatística de teste***.
    3. Determinação da ***região crítica*** (região de rejeição de H_0).
    4. ***Decisão*** (rejeitar ou não H_0).

Introdução

- ***Hipótese nula ou fundamental***, ***H***$_0$:
    - Deve conter uma ***igualdade*** (=).
    - ***Exemplo***:

$$H_0 : p = 0.5$$

Nota: ***Durante o teste assume-se que H$_0$ é verdadeira***. No fim do teste, pode rejeitar-se H_0 ou não, conforme os dados da amostra.

- ***Hipótese alternativa ou concorrente***, ***H***$_1$:
    - ***Contradiz H$_0$***. Logo, rejeitar H_0 significa aceitar H_1.
    - Deve conter uma ***desigualdade*** (< , > ou ≠).
    - ***Exemplo***:

$$H_1 : p \neq 0.5$$

Introdução

- ***Tipos de testes***:
  - ***Unilateral à esquerda***: Sinal " $<$ " em H_1.
  - ***Unilateral à direita***: Sinal " $>$ " em H_1.
  - ***Bilateral***: Sinal " $\neq$ " em H_1.

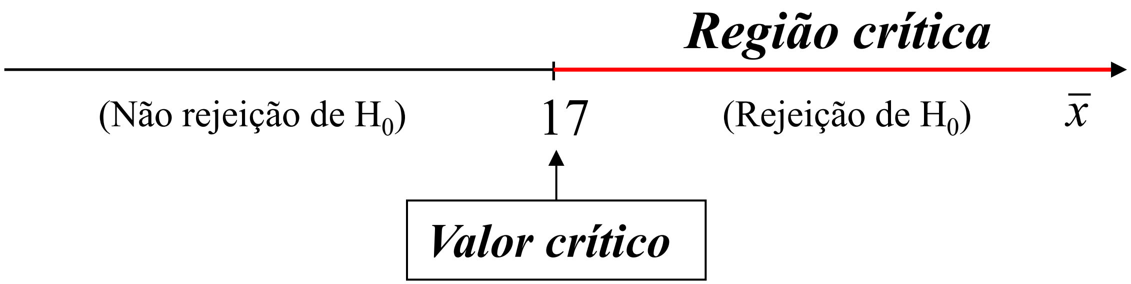
- ***Estatística de teste***:
  - ***Def***: Estatística ***usada para verificar se H_0 deve ser rejeitada*** ou não.
  - ***Exemplo***: Se as hipóteses são

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu > 15$$

então a ***estatística de teste*** deverá ser: $\overline{X}$

Introdução

- ***Região crítica (R.C.)***:
  - ***Def***: ***Conjunto de valores da estatística de teste*** que conduzem à ***rejeição de H_0***.
  - ***Exemplo***: $R.C. = \left\{\overline{X} : \overline{X} > 17\right\}$



- ***Valor crítico:***
  - ***Def***: ***Limiar de decisão*** a partir do qual se deve rejeitar H_0.

- ***Decisão***:
  - ***Def***: ***Rejeita-se H_0*** (aceita-se H_1) ***se o valor da estatística de teste*** observado na amostra ***pertence à região crítica***.

Tipos de erro

- ***Erro do tipo*** *I*:
  - ***Def***: ***Rejeitar*** uma hipótese $\boldsymbol{H_0}$ que é ***verdadeira***.
  - ***Probabilidade de ocorrer***:

$$\alpha = P(\text{Erro do tipo I}) = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})$$

Nota: $\boldsymbol{\alpha}$ designa-se por ***nível de significância*** do teste.

- ***Erro do tipo II***:
  - ***Def***: ***Não Rejeitar*** uma hipótese $\boldsymbol{H_0}$ que é ***falsa***.
  - ***Probabilidade de ocorrer***:

$$\beta = P(\text{Erro do tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa})$$

Tipos de erro

- ***Potência do teste, $1-\beta$*:**
  - ***Def*: *Probabilidade de rejeitar* uma hipótese $\boldsymbol{H_0}$ que é *falsa*.**

$$1-\beta = P\left(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}\right)$$

	H_0 verdadeira	H_0 falsa
H_0 rejeitada	Erro do tipo I (α)	Decisão correcta $(1-\beta)$
H_0 não rejeitada	Decisão correcta $(1-\alpha)$	Erro do tipo II (β)

Tipos de erro

Exercício: Sejam as hipóteses

$$H_0 : \mu = 120$$
$$H_1 : \mu < 120$$

Se o valor crítico do teste é 100, quais das seguintes afirmações estão correctas?

a) Trata-se de um teste unilateral à direita.

b) A estatística de teste é $\hat{P}$

c) A região crítica é o conjunto $\left\{\overline{X} : \overline{X} < 100\right\}$

d) A probabilidade do erro do tipo I é $P\left(\overline{X} < 100 \mid H_0 \text{ verdadeira}\right)$

Exercício

Recolheu-se uma amostra de tamanho 40 de uma população com desvio padrão de 25. Pretende-se testar as seguintes hipóteses usando um valor crítico de 80.

$$H_0 : \mu = 70$$

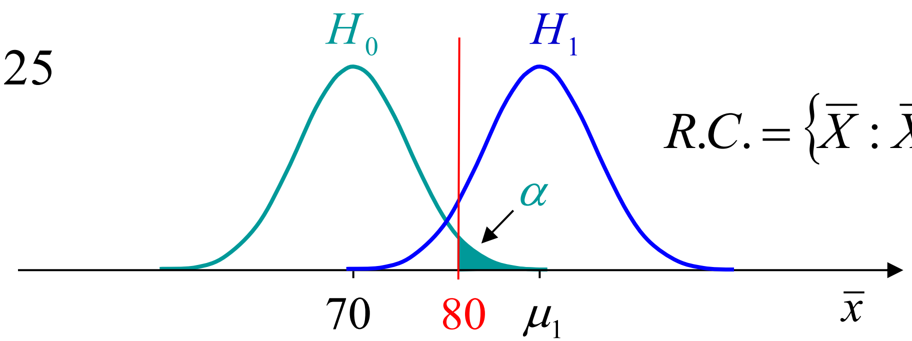
$$H_1 : \mu > 70$$

a) Determine a probabilidade do erro do tipo I.

$$n = 40 \underset{TLC}{\Rightarrow} \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad , \sigma = 25$$

$$H_0 \text{ verdadeira} \Rightarrow \mu = 70$$

$$H_1 \text{ verdadeira} \Rightarrow \mu = \mu_1 > 70$$



$$R.C. = \left\{\overline{X} : \overline{X} > 80\right\}$$

$$\alpha = P(\text{Erro do tipo I}) = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) = P(\overline{X} > 80 \mid \mu = 70) =$$

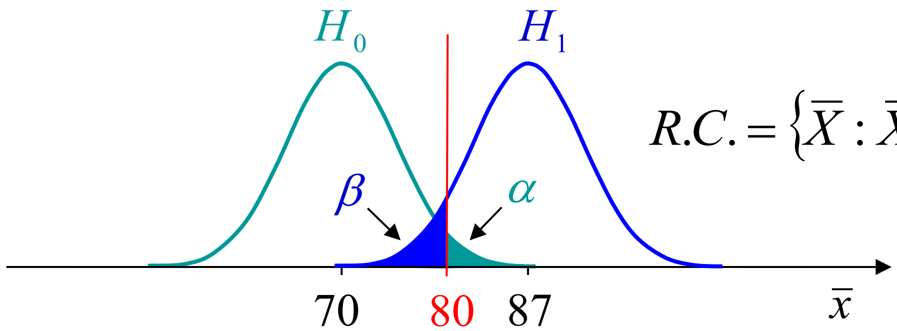
$$= 1 - P(\overline{X} \leq 80 \mid \mu = 70) = 0.0057$$

$$1 - pnorm\left(80, 70, \frac{25}{\sqrt{40}}\right)$$

Exercício

b) Considerando que o verdadeiro valor da média da população é 87, determine a probabilidade do erro do tipo II.

H_1 verdadeira $\Rightarrow \mu = 87$



$R.C. = \left\{ \bar{X} : \bar{X} > 80 \right\}$

$$\beta = P(\text{Erro do tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P\left(\bar{X} < 80 \mid \mu = 87\right) = 0.0383$$

$$pnorm\left(80, 87, \frac{25}{\sqrt{40}}\right)$$

Cálculo de α

- Teste ***unilateral à esquerda***:

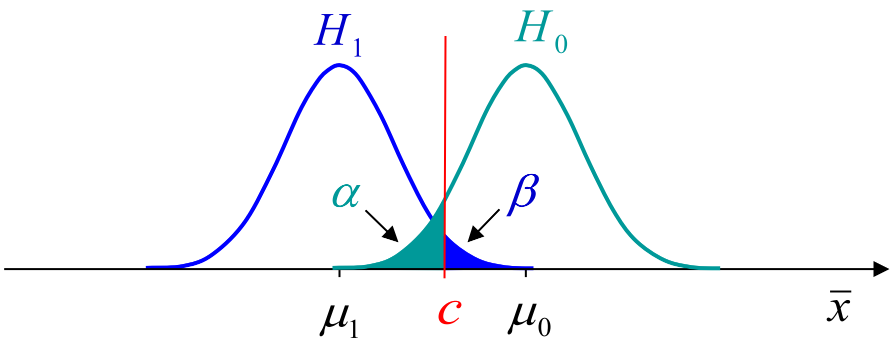
$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$

$$\alpha = P\left(\hat{\Theta} < c \mid \theta = \theta_0\right)$$

  - Exemplo: Seja

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

$$\alpha = P\left(\overline{X} < c \mid \mu = \mu_0\right)$$



Cálculo de α

- Teste ***unilateral à direita***:

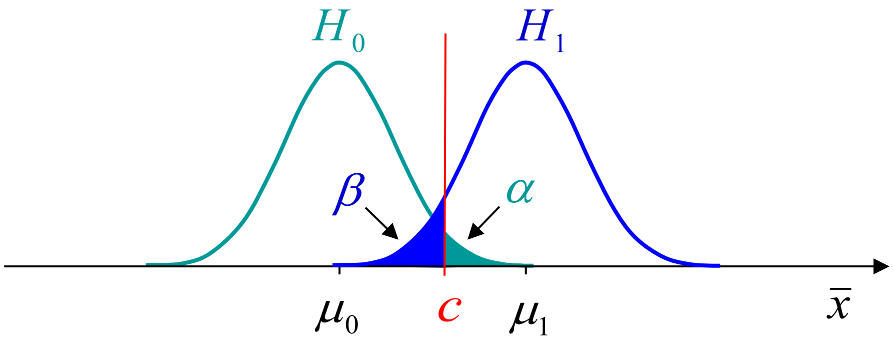
$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

$$\alpha = P\left(\hat{\Theta} > c \mid \theta = \theta_0\right)$$

  - Exemplo: Seja

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\alpha = P\left(\bar{X} > c \mid \mu = \mu_0\right)$$



Cálculo de α

- Teste ***bilateral***:

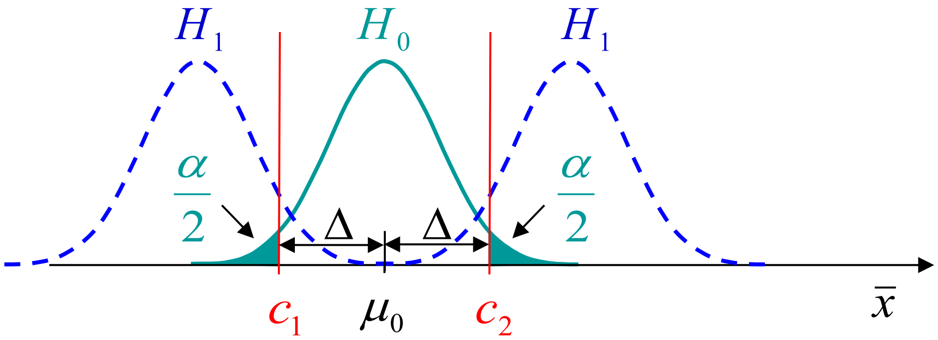
$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

$$\frac{\alpha}{2} = P\left(\hat{\Theta} < c_1 \mid \theta = \theta_0\right) = P\left(\hat{\Theta} > c_2 \mid \theta = \theta_0\right)$$

  - Exemplo: Seja

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\frac{\alpha}{2} = P\left(\overline{X} < c_1 \mid \mu = \mu_0\right) = P\left(\overline{X} > c_2 \mid \mu = \mu_0\right)$$



Valor de prova

- ***Valor de prova (ou valor p)***:
  - ***Def***: Probabilidade da ***estatística de teste tomar um valor igual ou mais extremo do que o observado na amostra,*** considerando H_0 verdadeira.

  - ***Vantagem (em relação ao método da região crítica)*****:**
    - ***Quantifica o grau com que H_0 é contradita*** pelos dados amostrais. ***Menor valor p*** representa ***maior grau de contradição*** de H_0.

  - ***Passos fundamentais do <u>método do valor de prova</u>*****:**

    1. Formulação das ***hipóteses*** H_0 e H_1.
    2. Escolha da ***estatística de teste***.
    3. Cálculo do ***valor p***.
    4. ***Decisão*** (rejeitar H_0 apenas se ***valor p*** $< \alpha$).

  - ***Nota***:
    - O ***método da região crítica*** era vantajoso quando o cálculo computacional de probabilidades era inexistente ou difícil, restando o uso de tabelas.

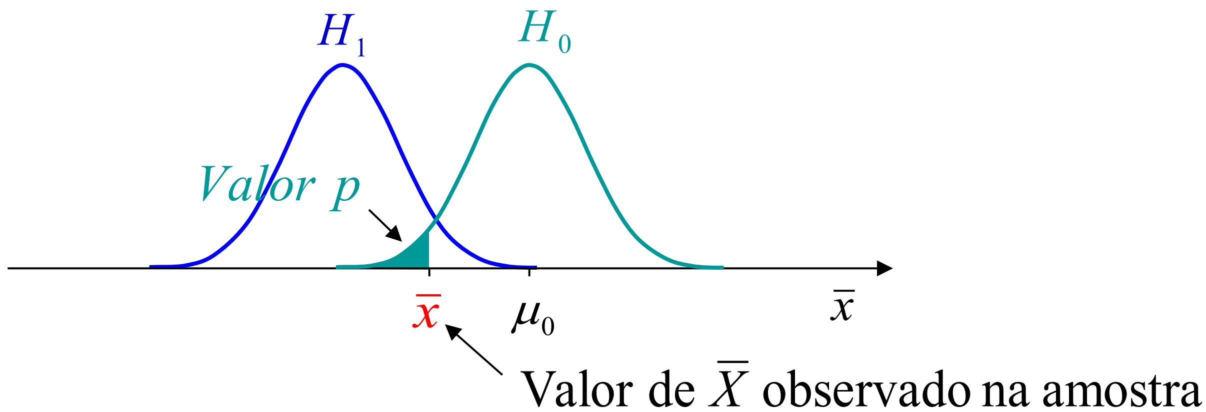
Cálculo do valor de prova

- Teste ***unilateral à esquerda***:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad\qquad Valor\ p = P\left(\hat{\Theta} \le \hat{\theta} \mid \theta = \theta_0\right)$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$

  - Exemplo: Seja

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad\qquad Valor\ p = P\left(\overline{X} \le \overline{x} \mid \mu = \mu_0\right)$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$



Cálculo do valor de prova

- Teste ***unilateral à direita***:

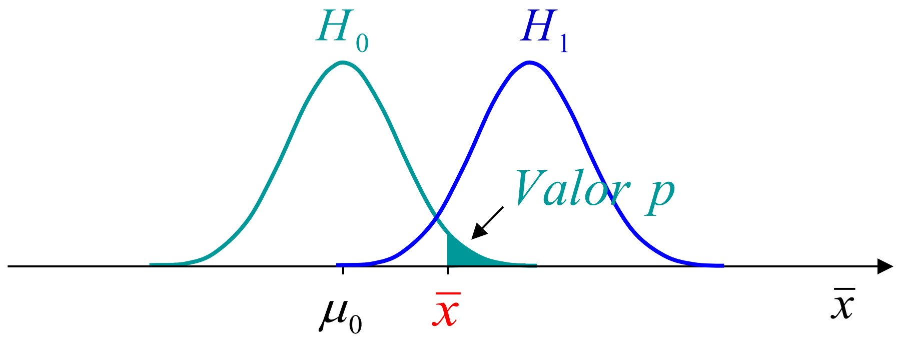
$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

$$Valor\ p = P\left(\hat{\Theta} \geq \hat{\theta} \mid \theta = \theta_0\right)$$

- Exemplo: Seja

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$Valor\ p = P\left(\overline{X} \geq \overline{x} \mid \mu = \mu_0\right)$$



Cálculo do valor de prova

- Teste ***bilateral***:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

$$Valor\ p = 2\min\left\{P\left(\hat{\Theta} \leq \hat{\theta} \mid \theta = \theta_0\right), P\left(\hat{\Theta} \geq \hat{\theta} \mid \theta = \theta_0\right)\right\}$$

  - Exemplo: Seja

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\bar{x} < \mu_0 \Rightarrow Valor\ p = 2P\left(\bar{X} \leq \bar{x} \mid \mu = \mu_0\right)$$

$$\bar{x} > \mu_0 \Rightarrow Valor\ p = 2P\left(\bar{X} \geq \bar{x} \mid \mu = \mu_0\right)$$